۱ اگر چهار جمله اول یک دنباله درجه دوم به صورت $۱,۳,x,۱۳$ باشد، مقدار $x^۲+۱$ کدام است؟

۱) ۶۵　　۲) ۵۰　　۳) ۳۷　　۴) ۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲　　(ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۹ و ۲۰ ـ متوسط)

تفاضلِ تفاضل جملات یک دنباله درجه دوم، ثابت خواهد بود. پس:

$$\begin{array}{ccccccc} ۱ & & ۳ & & x & & ۱۳ \\ & ۲ & & x-۳ & & ۱۳-x & \\ & & x-۵ & & ۱۶-۲x & & \end{array}$$

$$\Rightarrow ۱۶-۲x=x-۵ \rightarrow x=۷ \rightarrow x^۲+۱=۵۰$$

۲ چند دنباله حسابی با جمله اول ۲ و قدرنسبت طبیعی وجود دارد که ۶ جمله اول آن کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد؟

۱) ۱۸　　۲) ۱۹　　۳) ۲۰　　۴) ۲۱

پاسخ: گزینه ۲　　(ریاضی ۱ ـ صفحه ۲۲ تا ۲۴ ـ متوسط)

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \rightarrow a_n=۲+(n-۱)d$$

برای اینکه ۶ جمله اول آن کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد، کافی است جمله ششم کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد.

$$a_n=۲+(n-۱)d \rightarrow a_۶=۲+۵d<۱۰۰ \rightarrow d<\frac{۹۸}{۵} \rightarrow d<۱۹/۶ \rightarrow d\leq ۱۹$$

پس پاسخ گزینه ۲ است. (یعنی d می‌تواند اعداد $۱,۲,۳,\ldots,۱۹$ باشد.)

گروه آموزشی ماز

۳ در دنباله هندسی $\frac{۱۶}{۳},۴,۳,\ldots$، حاصل‌ضرب جملات سوم تا دهم $(a_۳\times a_۴\times\ldots\times a_{۱۰})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲^{۸۸}}{۳^{۳۴}}$　　۲) $\frac{۲^{۴۴}}{۳^{۳۶}}$　　۳) $\frac{۲^{۸۸}}{۳^{۳۶}}$　　۴) $\frac{۲^{۴۴}}{۳^{۳۴}}$

پاسخ: گزینه ۳　　(ریاضی ۱ ـ صفحه ۲۵ تا ۲۷ ـ متوسط)

$$a_n=a_۱r^{n-۱} \rightarrow a_۳\times a_۴\times a_۵\times\ldots\times a_{۱۰}=a_۱r^۲\times a_۱r^۳\times\ldots\times a_۱r^۹=a_۱^۸r^{۲+۳+\ldots+۹}=a_۱^۸r^{۴۴}=۳^۸\times(\frac{۴}{۳})^{۴۴}=۳^۸\times\frac{۲^{۸۸}}{۳^{۴۴}}=\frac{۲^{۸۸}}{۳^{۳۶}}$$

توجه:

$$۱+۲+۳+\ldots+۹=\frac{۹(۱۰)}{۲}=۴۵ \rightarrow ۲+۳+\ldots+۹=۴۵-۱=۴۴$$

تست و پاسخ ۴

با جمع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب با ۴، ۱۲ و ۲۰ یک دنبالهٔ هندسی به دست می‌آید، به طوری که مجموع سه جملهٔ دنبالهٔ حسابی، برابر جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی است. جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه بررسی نکات دنبالهٔ هندسی

ویژگی	توضیح فارسی	مثال
دنبالهٔ هندسی	هر جمله در عدد ثابت (q یا قدرنسبت) ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید.	$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ (×$\frac{1}{2}$)
$a_n = a_1 q^{n-1}$	جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی	$a_n = 3\times(\frac{1}{2})^{n-1}$
$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$	نسبت دو جمله در دنبالهٔ هندسی برابر با q به توان اختلاف اندیس‌ها است.	$\frac{a_{15}}{a_7} = q^8$
$\underbrace{a,b,c}_{\text{دنبالهٔ هندسی}} \Rightarrow b^2 = ac$	اگر سه عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، مربع وسطی برابر ضرب دو جملهٔ کناری است. (واسطه‌ی هندسی)	$3,x,12 \Rightarrow x^2 = 3\times12$ $\Rightarrow x = \pm6$
$a, \underbrace{\square,\square,\ldots,\square}_{n}, b$ $q^{n+1} = \frac{b}{a}$	اگر بین دو عدد a و b بخواهیم n واسطهٔ هندسی قرار دهیم، q از رابطهٔ داده‌شده به دست می‌آید.	$10,\underbrace{\square,\square,\square}_{\text{درج ۳ واسطهٔ هندسی}},1000$ $q^4 = \frac{1000}{10} = 100 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{100} = \pm\sqrt{10}$
$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی	$3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\ldots \Rightarrow S_{10} = \frac{3(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** سه جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر به ترتیب جملات را با اعداد گفته‌شده، جمع کنیم، داریم:

دنبالهٔ حسابی: $a-d, a, a+d$

دنبالهٔ هندسی: $a-d+4, a+12, a+d+20$

گام دوم: مجموع سه جملهٔ دنبالهٔ حسابی، برابر با جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی است؛ پس داریم:

$$a-d+a+a+d = a-d+4 \Rightarrow 3a = a-d+4 \Rightarrow d = 4-2a \quad (*)$$

گام سوم: در دنبالهٔ هندسی، رابطهٔ واسطهٔ هندسی بین جملات برقرار است؛ پس:

$$(a+12)^2 = (a-d+4)(a+d+20) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری }(*)} (a+12)^2 = (a-4+2a+4)(a+4-2a+20)$$

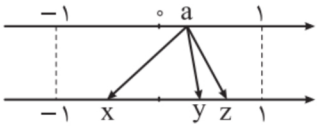
$$\Rightarrow (a+12)^2 = (3a)(24-a) \Rightarrow a^2+24a+144 = 72a-3a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2-48a+144 = 0 \Rightarrow a^2-12a+36 = 0 \Rightarrow (a-6)^2 = 0 \Rightarrow a = 6$$

گام چهارم: از رابطهٔ $(*)$ با جای‌گذاری مقدار a، $d = 4-2\times6 = -8$ به دست می‌آید؛ بنابراین جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برابر با $a-d = 6-(-8) = 14$ می‌شود.

تست و پاسخ ۵

در شکل زیر عدد a از محور بالا، به ریشه‌های مرتبهٔ دوم و سوم خود روی محور پایین وصل شده است. اگر x,y,z سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار $a^{-\frac{1}{4}}$ کدام است؟



۱) $\sqrt[6]{6}$
۲) $\sqrt{3}$
۳) $\sqrt[3]{2}$
۴) $3\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه توان و ریشه

	$a<-1$	$-1<a<0$	$0<a<1$	$a>1$
ریشه	$a<\sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}<\dots$	$\dots<\sqrt[5]{a}<\sqrt[3]{a}<a$	$a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\dots$	$\dots<\sqrt[5]{a}<\sqrt[4]{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt{a}<a$
توان	$a^2<a^4<\dots$ $\dots<a^5<a^3<a$	$\dots<a^4<a^2$ $a<a^3<a^5<\dots$	$\dots<a^3<a^2<a$	$a<a^2<a^3<a^4<\dots$

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که $0<a<1$، نتیجه می‌گیریم که $\sqrt[3]{a}<\sqrt{a}$ است. از طرفی اعداد مثبت دارای ۲ ریشه با فرجهٔ زوج هستند که قرینهٔ یکدیگرند. پس $x=-\sqrt{a}$، $y=\sqrt{a}$ و $z=\sqrt[3]{a}$ است.

گام دوم: اعداد x، y، z سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند و رابطهٔ واسطهٔ حسابی بین آن‌ها برقرار است:

$$2y=x+z\Rightarrow 2\sqrt{a}=-\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\Rightarrow 3\sqrt{a}=\sqrt[3]{a}\xrightarrow{\text{به توان ۶ می‌رسانیم.}}$$

$$3^6a^3=a^2\Rightarrow a=\frac{1}{3^6}$$

گام سوم: مقدار $a^{-\frac{1}{4}}$ برابر است با:

$$a^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{3^6}\right)^{-\frac{1}{4}}=(3^{-6})^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$$

تست و پاسخ ۶

با فرض $p=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ و $q=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$، حاصل $p+q$ چند برابر $p-q$ است؟

۱) $4+\sqrt{15}$
۲) $3+\sqrt{10}$
۳) $2+\sqrt{15}$
۴) $4+\sqrt{10}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره از فصل ۳ ریاضی دهم معمولاً یک سؤال در کنکور مطرح می‌شود. این سؤال هم مشابه یکی از سؤال‌های کنکور گذشته است.

خودت حل کنی بهتره عبارت‌های p و q را در $\sqrt{2}$ ضرب کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** عبارت p را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم تا زیر رادیکال‌ها را تبدیل به عبارت‌های مربع کامل کنیم:

$$\sqrt{2}p=\sqrt{2}(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})=\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=|\sqrt{5}+1|+|\sqrt{5}-1|$$

$$=\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1=2\sqrt{5}\Rightarrow p=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$$

گام دوم: به طور مشابه، عبارت q را هم در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt{2}q=\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}+1|+|\sqrt{3}-1|$$

$$=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}\Rightarrow q=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

گام سوم: حالا حاصل $p+q$ را بر $p-q$ تقسیم می‌کنیم تا نسبت خواسته‌شده را به دست بیاوریم:

$$\frac{p+q}{p-q}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3}=\frac{5+3+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$$

در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

تست و پاسخ ۷

در یک مستطیل طلایی، نسبت طول به عرض برابر $a^{۳}$ است. حاصل $P=\frac{۱}{a^{۳}-\sqrt{a^{۳}+۱}}+\frac{۱}{a^{۳}+\sqrt{a^{۳}+۱}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۴}$

$a^{۳}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}=\frac{\text{عرض}+\text{طول}}{\text{طول}}=\frac{\text{طول}}{\text{عرض}}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول**، در مستطیل طلایی، فرض می‌کنیم طول برابر با x و عرض برابر با y باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}=a^{۳}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\ (I)$$

گام دوم، عبارت P را ساده می‌کنیم. مخرج مشترک می‌گیریم:

$$P=\frac{۱}{a^{۳}-\sqrt{a^{۳}+۱}}+\frac{۱}{a^{۳}+\sqrt{a^{۳}+۱}}=\frac{a^{۳}+\sqrt{a^{۳}+۱}+a^{۳}-\sqrt{a^{۳}+۱}}{(a^{۳}+۱-\sqrt{a^{۳}+۱})(a^{۳}+۱+\sqrt{a^{۳}+۱})}=$$

$$\frac{۲a^{۳}+۲}{(a^{۳}+۱)^{۲}-a^{۳}}=\frac{۲(a^{۳}+۱)}{a^{۶}+۲a^{۳}+۱-a^{۳}}=\frac{۲(a^{۳}+۱)}{a^{۶}+a^{۳}+۱}$$

گام سوم، برای به دست آوردن حاصل عبارت P، مقدار $a^{۶}$ را به کمک رابطهٔ (I) محاسبه می‌کنیم:

$$a^{۳}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow a^{۶}=(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^{۲}=\frac{۱+۵+۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$$

گام چهارم، با جای‌گذاری مقادیر $a^{۳}$ و $a^{۶}$ در عبارت P داریم:

$$P=\frac{۲(a^{۳}+۱)}{a^{۶}+a^{۳}+۱}=\frac{۲(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})+۲}{\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۱}=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳+\sqrt{۵}+۱+\sqrt{۵}+۲}=\frac{۲(۳+\sqrt{۵})}{۶+۲\sqrt{۵}}=۱$$

تست و پاسخ ۸

اگر $\sqrt{۶}-\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}}=a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}$ باشد، حاصل $a+\frac{۱}{a}$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $\sqrt{۶}-۱$ ۲) $\sqrt{۳}+۱$ ۳) $\sqrt{۲}+۱$ ۴) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره برای رسیدن به درصدهای بالای ریاضی در کنکور، اولین قدم تسلط بر روی مفاهیم پایه مثل اتحاد و تجزیه، اعمال بر روی کسرها و رادیکال‌ها و توان است. بیشتر سؤال‌های کنکور با این مباحث ترکیب می‌شوند؛ بنابر این بدون تسلط کافی روی این مباحث امکان پرداختن به سایر موضوعات وجود ندارد.

خودت حل کنی بهتره ابتدا عبارت داده‌شده را به کمک مربع کامل کردن زیر رادیکال مخرج کسر، ساده کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول**، با ساده‌کردن عبارت داده‌شده شروع می‌کنیم. از مربع کامل کردن عبارت استفاده می‌کنیم:

$$a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}=\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}}-\sqrt{۶}=\frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{\sqrt{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}}}-\sqrt{۶}=\frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}-\sqrt{۶}$$

$$=\frac{(۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}-\sqrt{۶}=\frac{۴-۲\sqrt{۶}+۳\sqrt{۶}-۹}{۲-۳}-\sqrt{۶}=\frac{\sqrt{۶}-۵}{-۱}-\sqrt{۶}=۵-\sqrt{۶}-\sqrt{۶}$$

$$=۵-۲\sqrt{۶}\ (*)$$

گام دوم، عبارت $a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}$ را برحسب $a+\frac{۱}{a}$ می‌نویسیم:

$$a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}=(a+\frac{۱}{a})^{۲}-۲\overset{(*)}{=}۵-۲\sqrt{۶}\Rightarrow(a+\frac{۱}{a})^{۲}=۷-۲\sqrt{۶}$$

$$=(\sqrt{۶}-۱)^{۲}\xrightarrow{a>۰}a+\frac{۱}{a}=\sqrt{۶}-۱$$

۹ اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای شامل ۳ جمله و n یک عدد طبیعی باشد و $x^n-۱=(x^۸-۱)f(x)$، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳ (حسابان ۲ ـ صفحه ۲۰ ـ متوسط)

با توجه به اینکه $f(x)$ دارای ۳ جمله است، پس باید از اتحاد $a^۳-۱=(a-۱)(a^۲+a+۱)$ استفاده کنیم. از تساوی $x^n-۱=(x^۸-۱)f(x)$ نتیجه می‌شود که n مضرب ۸ است.

$$x^n-۱=(x^۸)^{\frac{n}{۸}}-۱=(x^۸-۱)((x^۸)^{\frac{n}{۸}-۱}+(x^۸)^{\frac{n}{۸}-۲}+۱)$$

پس: $\frac{n}{۸}=۳$ و $n=۲۴$

$$x^{۲۴}-۱=(x^۸-۱)(x^{۱۶}+x^۸+۱)\rightarrow f(x)=x^{۱۶}+x^۸+۱\rightarrow f(۱)=۳$$

۱۰ اگر $x^۲-\frac{۱}{x^۲}=۲$ باشد، مقدار $\frac{x^{۱۳}-x}{x^۹-x^۵}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (حسابان ۲ ـ صفحه ۲۰ ـ متوسط)

$$x^۲-\frac{۱}{x^۲}=۲\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x^۴+\frac{۱}{x^۴}-۲=۴\rightarrow x^۴+\frac{۱}{x^۴}=۶$$

$$\frac{x^{۱۳}-x}{x^۹-x^۵}=\frac{x(x^{۱۲}-۱)}{x(x^۸-x^۴)}=\frac{x^{۱۲}-۱}{x^۸-x^۴}=\frac{(x^۴-۱)(x^۸+x^۴+۱)}{x^۴(x^۴-۱)}=\frac{x^۸+x^۴+۱}{x^۴}$$

$$=x^۴+۱+\frac{۱}{x^۴}=۶+۱=۷$$

تست و پاسخ ۱۱

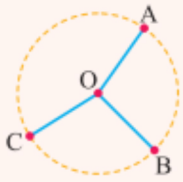
در مثلث ABC، اگر طول ضلع BC برابر با ۱۰ و طول میانهٔ وارد بر آن ۳/۵ باشد، چند نقطه برای رأس A یافت می‌شود، به طوری که مساحت این مثلث ۱۷ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

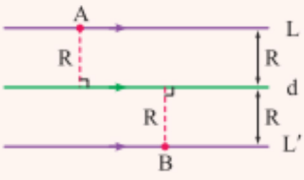
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

۱) برای پیداکردن نقطه‌هایی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ R هستند، باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع R بکشیم. هر نقطه‌ای که روی این دایره باشد، فاصله‌اش از O برابر R است. ببینید:

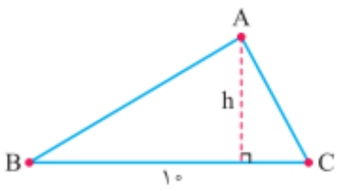


۲) برای پیداکردن نقطه‌هایی که از خط d به فاصلهٔ R هستند، باید دو خط موازی با d و به فاصلهٔ R در دو طرف آن رسم کنیم. هر نقطه‌ای که روی یکی از این خط‌ها باشد، فاصله‌اش از خط d برابر R است. نگاه کنید:



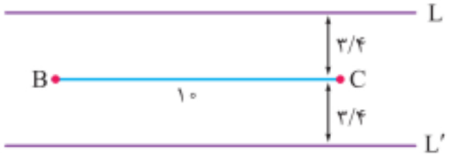
۳) هر وقت دنبال نقطه‌ای بودید که هر دو ویژگی بالا را داشته باشد، اول نقطه‌های هر ویژگی را جداگانه پیدا کنید و بعد نقطه‌های مشترک بین دو ویژگی را (که همان نقطه‌های برخورد هستند) در صورت وجود به عنوان جواب در نظر بگیرید.

پاسخ تشریحی **گام اول (مشخص‌کردن ویژگی اول رأس A):** یک شکل فرضی برای مثلث ABC می‌کشیم. فرض می‌کنیم طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر h باشد، در این صورت با توجه به این‌که مساحت این مثلث ۱۷ است، می‌توانیم بنویسیم:



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}h\times BC\Rightarrow ۱۷=\frac{۱}{۲}\times h\times ۱۰\Rightarrow h=\frac{۱۷}{۵}=۳/۴$$

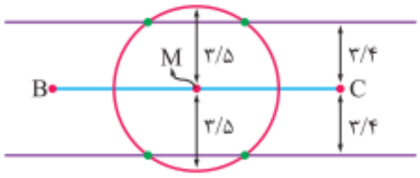
تساوی $h = ۳/۴$ به ما می‌گوید که فاصلهٔ نقطهٔ A از ضلع BC باید ۳/۴ واحد باشد. این از ویژگی اول رأس A.



(شکل ۲)

گام دوم (پیداکردن نقاط ویژگی اول): طبق مورد (۲) درس‌نامه این نقطه‌ها با کشیدن دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ ۳/۴ واحد از آن پیدا می‌شوند، ببینید:

گام سوم (مشخص‌کردن ویژگی دوم رأس A): اگر قرار باشد، طول میانهٔ وارد بر ضلع BC برابر ۳/۵ باشد، پس فاصلهٔ رأس A از وسط ضلع BC، باید برابر ۳/۵ باشد. این هم از ویژگی دوم رأس A.



(شکل ۳)

گام چهارم (پیداکردن نقطه‌های ویژگی دوم): فرض می‌کنیم نقطهٔ M، وسط ضلع BC باشد، در این صورت طبق مورد (۱) درس‌نامه این نقطه‌ها با کشیدن دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۳/۵ پیدا می‌شوند. این دایره را مطابق شکل روبه‌رو به شکل (۲) اضافه می‌کنیم.

گام پنجم (پیداکردن جواب‌های مسئله): طبق مورد (۳) درس‌نامه نقاط برخورد دایره با دو خط L و L′ جواب‌های مسئله هستند. همان‌طور که در شکل ۳ می‌بینید چون $۳/۵ > ۳/۴$ است، تعداد این نقطه‌ها ۴تاست؛ پس مسئله ۴ جواب دارد.

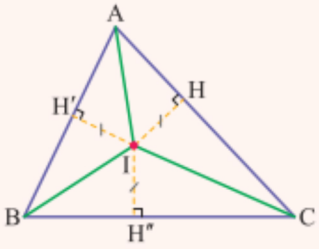
تست و پاسخ ۱۲

در مثلث ABC نیمساز زاویه‌های B و C در نقطهٔ I متقاطع‌اند. اگر مجموع فواصل نقطهٔ I از ضلع‌های مثلث ۹ واحد و $BC = ۳$ باشد، مساحت مثلث BIC کدام است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۲۵ ۴) ۴/۵

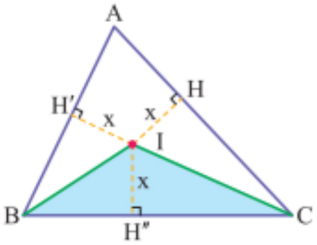
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه



نیمسازهای داخلی هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. فاصلهٔ این نقطهٔ همرسی از ضلع‌های مثلث یکسان است؛ یعنی در مثلث مقابل اگر I نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی مثلث باشد، می‌توانیم بگوییم $IH = IH' = IH''$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول (پیدا کردن فاصلهٔ I از ضلع‌های مثلث)**: شکل فرضی زیر را در نظر بگیرید. با توجه به درس‌نامه می‌توانیم فرض کنیم که $IH = IH' = IH'' = x$ باشد، در این صورت چون جمع فواصل نقطهٔ I از ضلع‌های مثلث ۹ واحد است، داریم:



$$x + x + x = ۹ \Rightarrow ۳x = ۹ \Rightarrow x = ۳$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حالا با داشتن طول ارتفاع IH'' و قاعدهٔ BC می‌توانیم مساحت مثلث BIC را به دست بیاوریم:

$$S_{BIC} = \frac{۱}{۲} x \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

تست و پاسخ ۱۳

در مثلث ABC که $AB = ۸$، عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ M قطع می‌کند، به طوری که $\frac{AM}{MC} = \frac{۱}{۴}$. محیط مثلث ABM کدام می‌تواند باشد؟

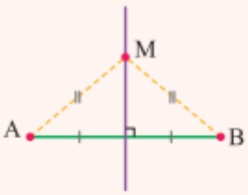
۱) ۱۲ ۲) ۱۶

۳) ۲۰ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

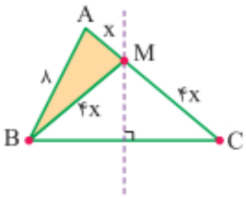
۱) اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، فاصله‌اش از دو سر آن پاره‌خط به یک اندازه است. مثلاً در شکل مقابل $MA = MB$ است.



۲) در هر مثلث با ضلع‌های a، b و c نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$|a-b|<c<a+b \quad , \quad |a-c|<b<a+c \quad , \quad |b-c|<a<b+c$$

پاسخ تشریحی **گام اول (رسم شکل و تحلیل اطلاعات مسئله)**: اول شکل مسئله را می‌کشیم. با توجه به این‌که $\frac{AM}{MC}=\frac{۱}{۴}$ است، می‌توانیم بگوییم $AM = x$ و $MC = ۴x$ است. نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط BC است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه $MB = MC = ۴x$ است.



گام دوم (پیداکردن محدودهٔ x): برای پیداکردن محدودهٔ x یکی از نامساوی‌های مورد (۲) درس‌نامه را برای مثلث رنگی می‌نویسیم:

$$۴x-x<۸<۴x+x \Rightarrow \begin{cases} ۸<۴x+x \Rightarrow ۸<۵x \Rightarrow \frac{۸}{۵}<x \\ ۳x<۸ \Rightarrow x<\frac{۸}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{۸}{۵}<x<\frac{۸}{۳}$$

گام سوم (پیداکردن محدودهٔ محیط مثلث AMB): چون $\frac{۸}{۵}<x<\frac{۸}{۳}$ است، پس محدودهٔ محیط مثلث AMB، یعنی $۵x+۸$ می‌شود:

$$\frac{۸}{۵}<x<\frac{۸}{۳} \xrightarrow{\times ۵} ۸<۵x<\frac{۴۰}{۳} \xrightarrow{+۸} ۱۶<\underbrace{۸+۵x}_{\text{محیط مثلث AMB}}<\frac{۶۴}{۳}$$

تنها عددی که در نابرابری بالا صدق می‌کند، عدد ۲۰ در ۳ است.

تست و پاسخ ۱۴

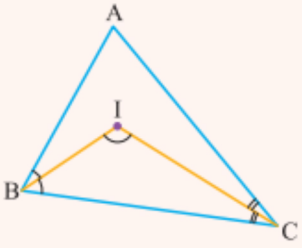
در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی B و C، همدیگر را در O قطع می‌کنند. اگر $BO > CO$ و $B\hat{O}C = ۱۳۶^\circ$، آن‌گاه کدام مقایسه بین طول اضلاع مثلث درست است؟

۱) $BC > AB > AC$ ۲) $BC > AC > AB$ ۳) $AB > AC > BC$ ۴) $AC > AB > BC$

پاسخ: گزینهٔ ۱

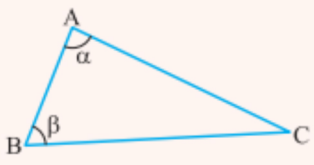
درس‌نامه

۱) زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویه از مثلث برابر با «$\frac{\text{زاویهٔ سوم مثلث}}{۲} + ۹۰^\circ$» است. مثلاً در مثلث روبه‌رو زاویهٔ بین نیمسازهای زوایای داخلی B و C برابر می‌شود با:

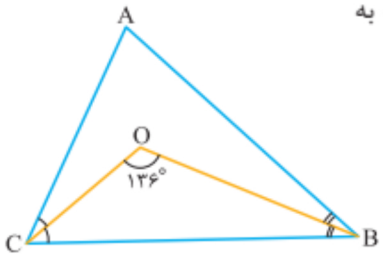


$$\hat{I} = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} \quad (\hat{A}: \text{زاویهٔ سوم مثلث})$$

۲) در هر مثلث، ضلعی که رو به زاویهٔ بزرگ‌تر قرار دارد، بزرگ‌تر از ضلعی است که رو به زاویهٔ کوچک‌تر است و برعکس. یعنی در مثلث روبه‌رو اگر $\alpha > \beta$ باشد، می‌توانیم بگوییم $BC > AC$ یا برعکس؛ اگر $BC > AC$، در این صورت حتماً $\alpha > \beta$ است.



پاسخ تشریحی **گام اول (رسم شکل و محاسبهٔ زاویهٔ A)**: شکل مسئله به صورت مقابل است. با توجه به مورد (۱) درس‌نامه برای زاویهٔ ۱۳۶° می‌توانیم بنویسیم:



$$۱۳۶^\circ = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲} = ۴۶^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۲^\circ$$

چون زاویهٔ $\hat{A}$ یک زاویهٔ منفرجه شد؛ بنابراین بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC، همین زاویه است.

گام دوم (مقایسه زاویه‌های B و C): سؤال می‌گوید $BO > CO$ است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، زاویهٔ $O\hat{C}B = \frac{\hat{C}}{۲}$ در مثلث OBC از زاویهٔ $O\hat{B}C = \frac{\hat{B}}{۲}$ بزرگ‌تر است؛ یعنی:

$$\frac{\hat{C}}{۲} > \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$$

گام سوم (مقایسهٔ اضلاع ABC): با توجه به گام‌های اول و دوم می‌توانیم بگوییم $\hat{A} > \hat{C} > \hat{B}$ است، بنابراین طبق مورد (۲) درس‌نامه، نامساوی ضلع رو به $\hat{B}$ > ضلع رو به $\hat{C}$ > ضلع رو به $\hat{A}$ در مثلث ABC برقرار است؛ یعنی:

$$BC > AB > AC$$

تست و پاسخ ۱۵

در مثلث ABC که $BC = ۶$، عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC در نقطهٔ M متقاطع‌اند. اگر $AM = \sqrt{۱۰}$، آن‌گاه فاصلهٔ M از ضلع BC کدام است؟

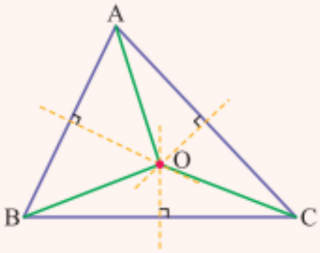
۱) ۳ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۱ ۴) $\sqrt{۵}$

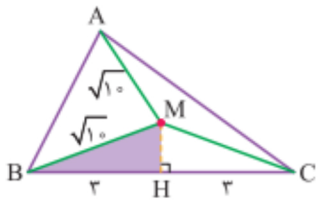
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

عمودمنصف‌های هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. فاصلهٔ این نقطهٔ همرسی از رأس‌های مثلث یکسان است، یعنی در مثلث مقابل، اگر O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها باشد، می‌توانیم بگوییم $OA = OB = OC$.



پاسخ تشریحی **گام اول (رسم شکل و محاسبهٔ طول MB، BH و HC)**: شکل مسئله به صورت مقابل است. طبق چیزهایی که در درس‌نامه گفتیم، $MB = MA = \sqrt{۱۰}$ است. از طرفی M روی عمودمنصف ضلع BC هم هست، پس: $BH = HC = \frac{۶}{۲} = ۳$



گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مسئله فاصلهٔ M از ضلع BC یعنی MH را می‌خواهد. برای محاسبهٔ طول MH از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH استفاده می‌کنیم:

$$MH^۲ + BH^۲ = MB^۲ \Rightarrow MH^۲ + ۳^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow MH^۲ = ۱۰ - ۹ = ۱ \Rightarrow MH = ۱$$

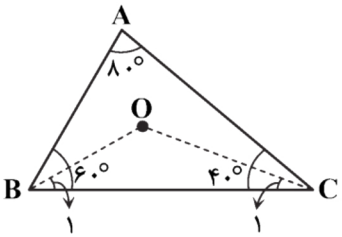
۱۶ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است، پس: $\hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۲۰^\circ$

چون $\hat{B} \neq \hat{C}$ است و جمع آن‌ها ۱۲۰° می‌باشد، پس یکی از آن‌ها کوچک‌تر از ۶۰° و دیگری بزرگ‌تر از ۶۰° است. لذا زاویهٔ A که برابر ۶۰° است، همواره زاویهٔ متوسط مثلث می‌باشد، بنابراین طبق نکتهٔ فوق، ضلع BC، ضلع متوسط مثلث است.

۱۷ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۱)



مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، پس ابتدا زاویهٔ سوم این مثلث را به‌دست می‌آوریم: $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} - \hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۴۰^\circ$

نقطهٔ O نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی می‌باشد، پس BO و CO نیمسازهای زوایای B و C هستند:

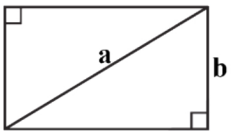
$$\hat{C}_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۴۰^\circ = ۲۰^\circ \qquad \hat{B}_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$$

مجموع زوایای دخلی مثلث BOC نیز باید ۱۸۰° باشد، پس:

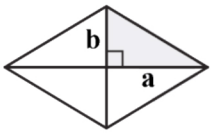
$$B\hat{O}C + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C + ۳۰^\circ + ۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C = ۱۳۰^\circ$$

۱۸ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: در لوزی، قطرها عمودمنصف یکدیگر هستند و لوزی را به چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ هم‌نهشت تقسیم می‌کنند.

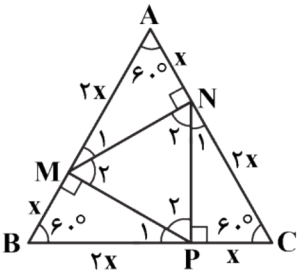


در شکل روبه‌رو، با معلوم بودن a و b (قطر و ضلع) در یک مستطیل، می‌توان با کمک قضیهٔ فیثاغورس، ضلع دیگر مستطیل را به‌دست آورد و مستطیل قابل‌رسم خواهد بود. امّا چون باید $a > b$ باشد، پس فقط با شرط $a > b$، مستطیل وجود دارد و لذا با معلوم بودن قطر و یک ضلع مستطیل، حداکثر یک مستطیل قابل‌رسم است.



در شکل روبه‌رو با معلوم بودن طول a و b (نصف اقطار) در یک لوزی، مثلث هاشور خورده قابل‌رسم است و در نتیجه لوزی نیز قابل‌رسم خواهد بود. پس با معلوم بودن دو قطر لوزی، فقط یک لوزی قابل‌رسم است.

۱۹ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۱)



با توجه به‌شکل روبه‌رو داریم:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ = \hat{P}_۱ = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M}_۲ = \hat{N}_۲ = \hat{P}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

پس مثلث MNP نیز متساوی‌الاضلاع است و $MN = NP = MP$

بنابراین سه مثلث AMN، BMP و CNP به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند.

$$AN = MB = PC = x \ , \ Cos۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{AN}{AM} = \frac{x}{AM} \Rightarrow AM = ۲x \Rightarrow NC = AM = BP = ۲x$$

$$MN = NP = MP = \sqrt{۴x^۲ - x^۲} = \sqrt{۳}x$$

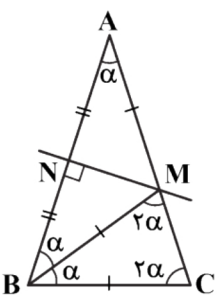
$$\frac{\triangle ABC \text{ محیط}}{\triangle MNP \text{ محیط}} = \frac{AB}{MN} = \frac{۳x}{\sqrt{۳}x} = \sqrt{۳}$$

۲۰ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس‌های ۱ و ۲، فصل ۱)

نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

نکته: زاویهٔ خارجی یک رأس مثلث، برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است.

طبق نکات فوق داریم:



$$AM = BM \Rightarrow \hat{A} = A\hat{B}M = \alpha$$

زاویهٔ خارجی مثلث ABM $B\hat{M}C = ۲\alpha$

$BM = AM = BC \Rightarrow$ متساوی‌الساقین است. $\triangle BMC \Rightarrow \hat{C} = B\hat{M}C = ۲\alpha$

$$AB = AC \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۲\alpha \Rightarrow M\hat{B}C = \alpha$$

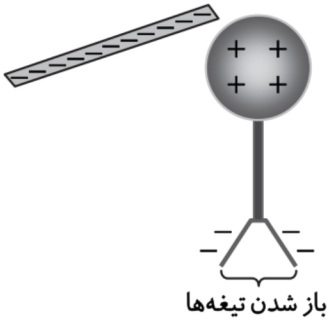
$$\triangle BMC : ۲\alpha + ۲\alpha + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$$

$\alpha = ۳۶^\circ$ یعنی $\hat{A} = ۳۶^\circ$ و همان کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث ABC است.

۲۱ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

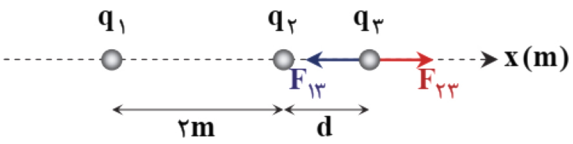
جملات «ب» و «پ» درست هستند.

میله بار منفی دارد و به‌دلیل القای بار، وضعیت الکتروسکوپ و تیغه‌های آن به‌شکل روبه‌رو می‌شود.



۲۲ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

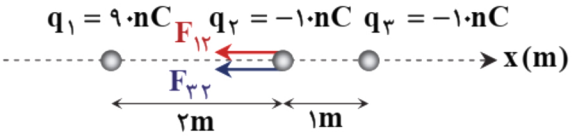
$q_۱$ و $q_۳$ ناهم‌نام‌اند یعنی نیرویی که $q_۱$ بر $q_۳$ وارد می‌کند جاذبه (به‌طرف چپ) است، پس برای آنکه نیروی خالص وارد بر $q_۳$ صفر شود می‌بایست $q_۲$ بر $q_۳$ نیروی به‌طرف راست وارد کند یعنی آن را دفع کند، پس بار $q_۲$ منفی است. ($q_۲ = -۱۰nC$)



$$F_{۱۳} = F_{۲۳} \Rightarrow \frac{k|q_۱q_۳|}{(۲+d)^۲} = \frac{k|q_۲q_۳|}{d^۲} \Rightarrow \frac{۹۰}{(۲+d)^۲} = \frac{۱۰}{d^۲} \Rightarrow ۲+d = ۳d \Rightarrow d = ۱m$$

یعنی $q_۳$ در نقطهٔ $x = ۲m$ قرار دارد.

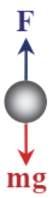
حالا نیروی خالص وارد بر $q_۲$ را حساب می‌کنیم.



$$\left.\begin{aligned} F_{۱۲} &= \frac{۹\times۱۰^۹\times۹۰\times۱۰^{-۹}\times۱۰\times۱۰^{-۹}}{۴} = \frac{۸۱۰۰}{۴}\times۱۰^{-۹} = \frac{۸۱}{۴}\times۱۰^{-۷}N \\ F_{۳۲} &= \frac{۹\times۱۰^۹\times۱۰^{-۸}\times۱۰^{-۸}}{۱} = ۹\times۱۰^{-۷}N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F}_{net} = -\frac{۱۱۷}{۴}\times۱۰^{-۷}\vec{i}$$

۲۳ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

بر گوی بالایی دو نیرو وارد می‌شود؛ یکی وزن خودش و دیگری نیروی دافعهٔ الکتریکی که گوی پایینی بر آن وارد می‌کند و این دو نیرو هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند. (برایند نیروهای وارد بر گوی صفر است.)



$$F = mg \Rightarrow \frac{k|qq|}{r^۲} = mg \Rightarrow \frac{۹\times۱۰^۹\times q^۲}{(۰/۰۲)^۲} = ۰/۹\times۱۰^{-۳}\times۱۰$$

$$\Rightarrow q^۲ = \frac{(۰/۰۲)^۲\times۹\times۱۰^{-۳}}{۹\times۱۰^۹} = (۰/۰۲)^۲\times۱۰^{-۱۲} \Rightarrow q = ۰/۰۲\times۱۰^{-۶} = ۲\times۱۰^{-۸}C$$

با استفاده از اصل کوانتیده بودن بار الکتریکی داریم:

$$q = ne \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۸} = n\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} \Rightarrow n = \frac{۵}{۴}\times۱۰^{۱۱} = ۱/۲۵\times۱۰^{۱۱}$$

۲۴ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

هرگاه در جهت خط‌های میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی کم می‌شود و هرگاه در خلاف جهت خط‌های میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی زیاد می‌شود و اگر عمود بر خط‌های میدان حرکت کنیم، پتانسیل تغییر نمی‌کند. پس $V_C = V_D > V_B > V_A$ است؛ بنابراین تا اینجا معلوم شد که عبارت‌های «الف» و «ب» نادرست هستند.

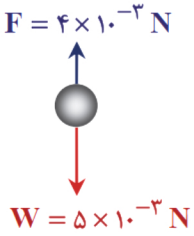
در میدان الکتریکی یکنواخت، اندازهٔ اختلاف‌پتانسیل میان دو نقطه از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$|\Delta V| = EdCos\theta = E\times$ اندازهٔ جابه‌جایی در امتداد خطوط میدان

$$\Rightarrow \begin{cases} V_D - V_A = ۵\times ۱۰^{۳}\times CA = ۵\times ۱۰^{۳}\times \frac{۵۰\sqrt{۲}}{۱۰۰} = ۲۵۰۰\sqrt{۲}V \ (\text{عبارت ت نادرست است.}) \\ V_C - V_B = ۵\times ۱۰^{۳}\times \frac{۱}{۲}CA = ۱۲۵۰\sqrt{۲}V \ (\text{عبارت پ درست است.}) \end{cases}$$

۲۵ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

جهت میدان الکتریکی، جهت نیروی وارد بر بار مثبت را نشان می‌دهد. در اینجا که بار منفی است، جهت نیروی الکتریکی، مخالف جهت میدان است؛ یعنی روبه بالا.



$$F = |q|E = ۱۰\times ۱۰^{-۹}\times ۴\times ۱۰^{۵} = ۴\times ۱۰^{-۳}\,N$$

$$W = mg = ۰/۵\times ۱۰^{-۳}\times ۱۰ = ۵\times ۱۰^{-۳}\,N$$

$$F_{net} = W - F = ۱۰^{-۳}\,N$$

نیروی خالص وارد بر ذره $۱۰^{-۳}$ نیوتون به طرف پایین است. طبق قضیهٔ کار- انرژی جنبشی، کار کل برابر است با کار نیروی خالص وارد بر جسم:

$$\Delta K = W_t \Rightarrow \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) = -۱۰^{-۳}\times ۴$$

چون نیروی خالص روبه پایین و جابه‌جایی به‌طرف بالا است، کار کل منفی می‌شود.

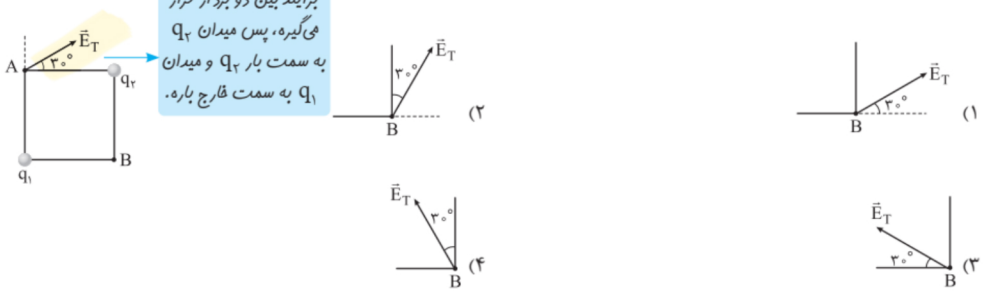
$$\frac{۱}{۲}\times ۰/۵\times ۱۰^{-۳}(v_۲^۲ - ۳۶) = -۴\times ۱۰^{-۳} \Rightarrow v_۲^۲ - ۳۶ = -۱۶ \Rightarrow v_۲^۲ = ۲۰ \Rightarrow v_۲ = \sqrt{۲۰}\frac{m}{s} = ۲\sqrt{۵}\frac{m}{s}$$

۲۶ تست و پاسخ

جهت میدان الکتریکی خالص حاصل از بارهای ذره‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در گوشهٔ A از مربع شکل زیر، نشان داده شده است. کدام گزینه جهت میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو بار را در گوشهٔ B به درستی نشان می‌دهد؟

فاصلهٔ گوشهٔ A از بار $q_۱$ و $q_۲$ و هم‌چنین فاصلهٔ گوشهٔ B از بار $q_۱$ و $q_۲$ یکسانه.

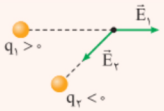
برایند بین دو بردار قرار می‌گیره، پس میدان $q_۲$ به سمت بار $q_۲$ و میدان $q_۱$ به سمت خارج باره.



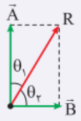
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه تعیین جهت میدان الکتریکی

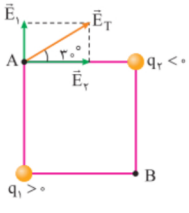
مطابق شکل مقابل، میدان الکتریکی ناشی از بار مثبت در راستای خط واصل بار به نقطهٔ مورد نظر و به سمت خارج بار و میدان ناشی از بار منفی در راستای خط واصل بار به نقطهٔ مورد نظر و به سمت بار است.



نکته برایند دو بردار همیشه بین دو بردار بوده و اگر دو بردار غیر هم‌اندازه باشند، بردار برایند به بردار بزرگ‌تر نزدیک‌تر است، یعنی زاویه‌ای که بردار برایند دو بردار با بردار بزرگ‌تر می‌سازد، از زاویه‌ای که با بردار کوچک‌تر می‌سازد، کم‌تر است. به شکل زیر توجه کنید. چون بردار $\vec{A}$ از بردار $\vec{B}$ بزرگ‌تر است، برایند دو بردار $(\vec{R})$ زاویهٔ کوچک‌تری با بردار $\vec{A}$ می‌سازد. $(\theta_۱ < \theta_۲)$



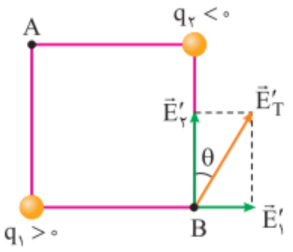
پاسخ تشریحی **گام اول:** میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A را به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم تا بردار میدان الکتریکی ناشی از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را به دست آوریم. با توجه به شکل مقابل درمی‌یابیم، چون جهت میدان الکتریکی ناشی از بار $q_۱$ به سمت خارج بار و جهت میدان الکتریکی ناشی از بار $q_۲$ به سمت بار است، بار $q_۱$ مثبت و $q_۲$ منفی است.



از طرفی برای مقایسهٔ بزرگی میدان‌ها طبق رابطهٔ $E=\frac{k|q|}{r^2}$ داریم:

$$\begin{cases} E_1 = E_T \cdot \sin 30^\circ \\ E_2 = E_T \cdot \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \left|\frac{q_2}{q_1}\right| \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow[\frac{E_2}{E_1}=\sqrt{3}]{r_1=r_2} \sqrt{3} = \left|\frac{q_2}{q_1}\right| \Rightarrow |q_2| = \sqrt{3}\,|q_1|$$



گام دوم: بردار میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ B را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که فاصلهٔ نقطهٔ B از بارهای q_1 و q_2 با فاصلهٔ نقطهٔ A از بارهای q_1 و q_2 یکسان است، درمی‌یابیم باز هم بزرگی میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 در نقطهٔ B، $\sqrt{3}$ برابر بزرگی میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 در نقطهٔ B است؛ بنابراین مطابق شکل مقابل داریم:

$$\tan\theta = \frac{E'_1}{E'_2} = \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

تست و پاسخ ۲۷

در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $5\times10^5\ N/C$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذرهٔ بارداری به جرم $2g$ رها می‌شود. اگر ذره با شتابی به اندازهٔ $2\ m/s^2$ به سمت بالا شروع به حرکت کند، بار الکتریکی ذره برحسب نانوکولن کدام است؟ ($g=10\ N/kg$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۴۸

۲) −۴۸

۳) ۳۲

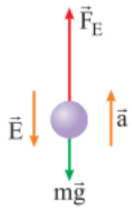
۴) −۳۲

جهت شتاب رو به بالاست، یعنی نیروی رو به بالا (نیروی الکتریکی) بزرگ‌تر از نیروی رو به پایین (نیروی وزن) است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره *اول اندازهٔ نیروی الکتریکی رو با توجه به قانون دوم نیوتون حساب کن، بعدش بار الکتریکی رو به دست بیار.*

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به جهت شتاب ذره، نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم و بزرگی نیروی الکتریکی را به دست می‌آوریم:



$$F_{net} = ma \xrightarrow{F_{net}=F_E-mg} F_E - mg = ma$$

$$\xrightarrow[a=2\,m/s^2]{m=2g=2\times10^{-3}\,kg} F_E - (2\times10^{-3}\times10) = 2\times10^{-3}\times2$$

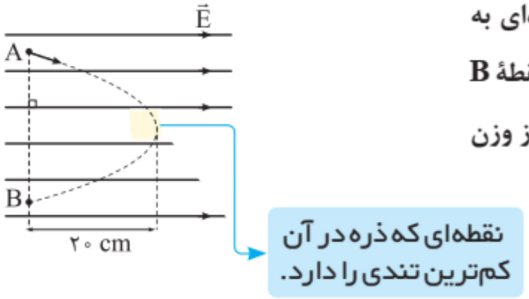
$$\Rightarrow F_E = 24\times10^{-3}\ N$$

گام دوم: با توجه به این‌که جهت میدان الکتریکی رو به پایین و جهت نیروی الکتریکی به سمت بالا است، معلوم می‌شود که بار ذره منفی است (رد ۱ و ۳). حالا مقدار بار ذره را حساب می‌کنیم:

$$F_E = E|q| \Rightarrow 24\times10^{-3} = 5\times10^5\times|q| \Rightarrow |q| = 4/8\times10^{-8}\,C = 48\,nC$$

$$\xrightarrow{q<0} q = -48\,nC$$

مطابق شکل روبه‌رو، در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $E = ۵\times۱۰^{۴}\ V/m$، ذره‌ای به جرم $۲g$ / ۰ با تندی $۵\ m/s$ از نقطهٔ A پرتاب شده و پس از طی مسیر نشان داده شده، به نقطهٔ B می‌رسد. اگر کمینهٔ تندی ذره در این مسیر $۴\ m/s$ باشد، بار ذره چند نانوکولن است؟ (از وزن ذره و مقاومت هوا چشم‌پوشی شود.)



۱) ۳۰

۲) ۹۰

۳) −۳۰

۴) −۹۰

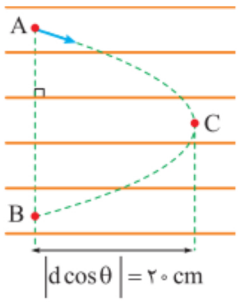
پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره *توی این مدل سؤالا با این که راحت نیستن، ولی خیلی راحت می تونی دو تا گزینه رو با علامت‌ها رد کنی، این کار باعث می‌شه با اعتمادبه‌نفس بیشتری ادامه بدی.*

درس‌نامه قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، برابر است با تغییر انرژی جنبشی.

$$W_t = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v^{۲} - v_{۰}^{۲}) \xrightarrow[W_t = W_E]{\text{اگر تنها نیروی الکتریکی داشته باشیم.}} W_E = \frac{۱}{۲}m(v^{۲} - v_{۰}^{۲})$$

پاسخ تشریحی مطابق شکل زیر درمی‌یابیم که مؤلفهٔ قائم سرعت ثابت است، اما مؤلفهٔ افقی سرعت در نقطهٔ C صفر است، پس کمینهٔ تندی ذره در نقطهٔ C است؛ بنابراین طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:



$$W_t = \Delta K \xrightarrow[W_t = W_E]{\text{صرف نظر از وزن و مقاومت هوا}} W_E = \frac{۱}{۲}m(v_C^{۲} - v_A^{۲}) \xrightarrow{W_E = E|q|d\cos\theta} E|q|d\cos\theta = \frac{۱}{۲}m(v_C^{۲} - v_A^{۲})$$

$$\xrightarrow[d\cos\theta = -۲۰\,cm,\ m = ۰/۲g = ۰/۲\times۱۰^{-۳}\,kg]{E = ۵\times۱۰^{۴}\,V/m,\ v_A = ۵\,m/s,\ v_C = ۴\,m/s} ۵\times۱۰^{۴}\times|q|\times(-۰/۲) = \frac{۱}{۲}(۰/۲\times۱۰^{-۳})\times(۱۶ - ۲۵)$$

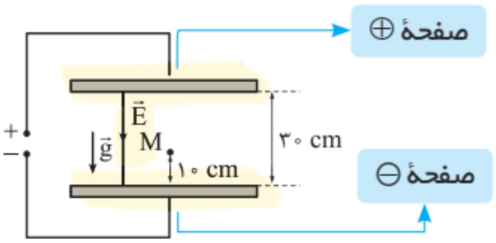
$$\Rightarrow |q| = ۹\times۱۰^{-۸}\,C = ۹۰\,nC$$

با توجه به این‌که نیروی الکتریکی وارد بر ذره، در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی است، بنابراین بار الکتریکی ذره منفی است. داریم:

$$q = -۹۰\,nC$$

تست و پاسخ ۲۹

در شکل زیر، ذره‌ای به جرم $۲\,g$ و $۰/۲$ و بار الکتریکی $-۴۰\mu C$ در فضای بین دو صفحهٔ رسانای افقی از نقطهٔ M رها می‌شود. اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه $۳۰\,V$ باشد، تندی ذره هنگام رسیدن به صفحهٔ بالایی چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰\,N/kg$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) ۲

۳) $۲۰\sqrt{۲}$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره *اول اختلاف پتانسیل نقطهٔ M با صفحهٔ مثبت رو به دست بیار. بعدش کار میدان الکتریکی رو حساب کن. در نهایت با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، تندی نهایی رو به دست بیار.*

پاسخ تشریحی **گام اول:** می‌دانیم بزرگی اختلاف پتانسیل دو نقطه در داخل میدان الکتریکی یکنواخت، با فاصلهٔ دو نقطه در راستای خطوط میدان $(d\cos\theta)$ رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار اختلاف پتانسیل نقطهٔ M با صفحهٔ مثبت داریم:

$$|\Delta V| = Ed\cos\theta \xrightarrow{\text{یکسان } E} \frac{V_+ - V_-}{V_+ - V_M} = \frac{۳۰}{۳۰-۱۰} = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{V_+ - V_- = ۳۰\,V} \frac{۳۰}{V_+ - V_M} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow V_+ - V_M = ۲۰\,V$$

گام دوم: طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، تندی ذره در لحظهٔ رسیدن به صفحهٔ مثبت را حساب می‌کنیم:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow[\Delta K = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲)]{W_t = W_{mg} + W_E} W_{mg} + W_E = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲)$$

$$\xrightarrow[W_E = -\Delta U_E = -q\Delta V]{W_{mg} = (-)mgd} -mgd - q\Delta V = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲)$$

$$\xrightarrow[\Delta V = ۲۰\,V,\ q = -۴۰\mu C = -۴۰\times۱۰^{-۶}\,C]{m = ۰/۲\,g = ۲\times۱۰^{-۴}\,kg,\ v_۰ = ۰,\ d = ۲۰\,cm = ۰/۲\,m} (-)۲\times۱۰^{-۴}\times۱۰\times۰/۲ - (-۴۰\times۱۰^{-۶}\times۲۰) = \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^{-۴}(v^۲ - ۰)$$

$$\Rightarrow -۴\times۱۰^{-۴} + ۸\times۱۰^{-۴} = ۱۰^{-۴}v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۴ \Rightarrow v = ۲\,m/s$$

تست و پاسخ ۳۰

مساحت هر یک از صفحه‌های خازن تختی $۲\,cm^۲$، فاصلهٔ بین آن‌ها $۰/۱\,mm$ و ثابت دی‌الکتریک بین صفحه‌ها برابر با ۵ است. این خازن را به باتری با اختلاف پتانسیل $۱۶۰\,V$ وصل کرده و پس از شارژشدن از آن جدا می‌کنیم. اگر در این حالت، دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن را خارج کنیم، انرژی ذخیره‌شده در آن چند نانو ژول و چگونه تغییر می‌کند؟ $(\varepsilon_۰ = ۹\times۱۰^{-۱۲}\,\frac{C^۲}{N.m^۲})$

یعنی بار ذخیره‌شده در خازن ثابت می‌ماند.

چون ثابت دی‌الکتریک ۵ است، ظرفیت خازن $\frac{۱}{۵}$ برابر می‌شود.

۱) ۴۶۰۸، کاهش می‌یابد.

۲) ۴۶۰۸، افزایش می‌یابد.

۳) ۵۷۶۰، کاهش می‌یابد.

۴) ۵۷۶۰، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

وقتی یک خازن شارژشده را از باتری جدا کنیم، با تغییر ظرفیت خازن، بار ذخیره‌شده در آن ثابت می‌ماند.

از طرفی طبق رابطهٔ $U=\frac{Q^2}{2C}$ در این حالت انرژی ذخیره‌شده در خازن با ظرفیت خازن رابطهٔ عکس دارد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ظرفیت خازن را در حالت اول به دست می‌آوریم:

$$C=\kappa\frac{\varepsilon_0 A}{d}\xrightarrow[d=0/1mm=10^{-4}\,m]{\kappa=5,\,A=2cm^2=2\times10^{-4}\,m^2} C_1=\frac{5\times9\times10^{-12}\times2\times10^{-4}}{10^{-4}}=9\times10^{-11}\,F$$

گام دوم: انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت اول حساب می‌کنیم:

$$U=\frac{1}{2}CV^2\xrightarrow[V=160\,V]{C=9\times10^{-11}\,F} U_1=\frac{1}{2}\times9\times10^{-11}\times(160^2)=1152\times10^{-9}\,J=1152\,nJ$$

گام سوم: می‌دانیم وقتی خازن شارژشده را از باتری جدا کنیم، بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن ثابت می‌ماند و طبق رابطهٔ $U=\frac{Q^2}{2C}$ انرژی خازن با ظرفیت خازن رابطهٔ عکس دارد؛ بنابراین با خارج‌کردن دی‌الکتریک $(\kappa=5)$ از بین صفحات خازن، ظرفیت آن $\frac{1}{5}$ برابر می‌شود و انرژی ذخیره‌شده در آن ۵ برابر می‌شود؛ بنابراین برای محاسبهٔ تغییر انرژی ذخیره‌شده در خازن داریم:

$$U=\frac{Q^2}{2C}\xrightarrow{\text{ثابت }Q}\frac{U_2}{U_1}=\frac{C_1}{C_2}\xrightarrow[U_1=1152\,nJ]{\frac{C_1}{C_2}=\frac{\kappa_1}{\kappa_2}=5}\frac{U_2}{1152}=5\Rightarrow U_2=5760\,nJ$$

$$\Rightarrow U_2-U_1=5760-1152=4608\,nJ$$

بنابراین انرژی ذخیره‌شده در خازن به اندازهٔ $4608\,nJ$ افزایش می‌یابد.

حواستون باشه *توی این سؤالا خواست به خواستهٔ سؤال باشه. گفته انرژی چه‌قدر کم یا زیاد می‌شه. نه این‌که انرژی به چند می‌رسه. اگه اشتباه متوجه بشی ۴ رو انتخاب می‌کنی که دام تستیه.*

تست و پاسخ ۳۱

H و He

چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ نخستین دو عنصری که پس از مهبانگ تشکیل شده‌اند، درست است؟

- **نماد شیمیایی هر دوی آن‌ها با حرف H آغاز می‌شود.**
- **شمار خطوط طیف نشری خطی آن‌ها در گسترهٔ مرئی، برابر است.**
- **یکی از آن‌ها، فراوان‌ترین عنصر مشتری و دیگری، فراوان‌ترین عنصر سیارهٔ زمین است.**
- **انرژی گرمایی و نور خیره‌کنندهٔ خورشید، به دلیل انجام واکنش شیمیایی بین این دو عنصر است.**

H Fe

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی تنها عبارت اول درست است.

نخستین دو عنصری که پس از مهبانگ پا به عرصهٔ جهان گذاشتند، هیدروژن و هلیم هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: نماد شیمیایی عنصر هیدروژن، H و نماد شیمیایی عنصر هلیم، He است. نماد شیمیایی هر دو عنصر با حرف H آغاز می‌شود.

عبارت دوم: طیف نشری خطی هیدروژن در گسترهٔ مرئی، شامل ۴ خط و طیف نشری خطی هلیم در گسترهٔ مرئی، شامل ۶ خط است.

عبارت سوم: هلیم فراوان‌ترین عنصر سازندهٔ هیچ‌یک از دو سیارهٔ زمین و مشتری نیست! فراوان‌ترین عنصر سیارهٔ مشتری، هیدروژن و فراوان‌ترین عنصر سیارهٔ زمین، آهن است.

عبارت چهارم: انرژی گرمایی و نور خیره‌کنندهٔ خورشید، به دلیل تبدیل هیدروژن به هلیم در واکنش‌های هسته‌ای است، نه انجام واکنش‌های شیمیایی!

تست و پاسخ ۳۲

کدام گزینه نادرست است؟

۱) ترتیب پرشدن زیرلایه‌های $4s, 4p, 4f, 5d$ به صورت $4s \rightarrow 4p \rightarrow 4f \rightarrow 5d$ است.

۲) ایزوتوپی از کربن که برای مقیاس اندازه‌گیری جرم اتم‌ها به کار می‌رود، در مجموع دارای ۱۸ ذرهٔ زیراتمی است. ← $^{12}_{6}C$

۳) شمار عنصرها در دوره‌های چهارم و پنجم جدول تناوبی، برابر است.

۴) با استفاده از موقعیت عنصرها در جدول تناوبی، می‌توان شمارهٔ گروه و دوره، شمار الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌ها را برای آن‌ها، به دست آورد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی با استفاده از موقعیت یک عنصر در جدول تناوبی، می‌توان شمارهٔ گروه و دوره، شمار الکترون‌ها و پروتون‌ها را برای یک عنصر به دست آورد، ولی به شمار نوترون‌های اتم‌های آن عنصر نمی‌توان پی برد؛ زیرا در جدول دوره‌ای، عدد جرمی ایزوتوپ‌های یک عنصر نشان داده نشده است و فقط جرم اتمی میانگین آن، گزارش شده!

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مجموع $n+l$ را برای هر یک از زیرلایه‌ها به دست می‌آوریم و سپس با توجه به دو قاعدهٔ زیر، ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها را مشخص می‌کنیم:

۱) زیرلایه با $n+l$ کوچک‌تر، زودتر پر می‌شود.

۲) اگر $n+l$ برای دو یا چند زیرلایه یکسان باشد، زیرلایه با n کوچک‌تر، زودتر پر می‌شود.

$4s \rightarrow n+l = 4+0 = 4$

$4p \rightarrow n+l = 4+1 = 5$

$4f \rightarrow n+l = 4+3 = 7$

$5d \rightarrow n+l = 5+2 = 7$ ⇒ n، $4f$ کوچک‌تری دارد.

⇒ ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها: $4s \rightarrow 4p \rightarrow 4f \rightarrow 5d$

۲) ایزوتوپی از کربن که برای مقیاس اندازه‌گیری جرم اتم‌ها به کار می‌رود، ایزوتوپ $^{12}_{6}C$ است که شمار ذرات زیراتمی آن برابر است با:

مجموع شمار ذره‌های زیراتمی = تعداد نوترون‌ها + تعداد پروتون‌ها + تعداد الکترون‌ها = عدد جرمی + عدد اتمی $= 6 + 12 = 18$

(تعداد الکترون‌ها برابر تعداد پروتون‌ها؛ عدد جرمی)

۳) هر یک از دوره‌های چهارم و پنجم جدول شامل ۲ عنصر دستهٔ s، ۱۰ عنصر دستهٔ d و ۶ عنصر دستهٔ p است و در مجموع هر کدام از این دوره‌ها شامل ۱۸ عنصر است.

تست و پاسخ ۳۳

شمار اتم‌ها در ۴۸۰ گرم متانول (CH_3OH)، با شمار اتم‌ها در چند گرم سرب مداد، برابر است؟ ← گرافیت

($Pb = 207, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۱) ۱۰۸۰ ۲) ۱۸۶۳۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۵۱۷/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته مغز مداد از گرافیت (دگرشکلی از کربن) تشکیل شده است، اما در گذشته به دلیل شکل ظاهری آن، مردم فکر می‌کردند جنس مغز مداد از سرب (Pb) است. ***هنوز که هنوزه!*** گرافیت به سرب مداد معروف است.

پاسخ تشریحی گام اول: شمار مول اتم‌ها در ۴۸۰ گرم متانول را حساب می‌کنیم. در هر مول متانول (CH_3OH)، در مجموع ۶ مول اتم وجود دارد؛ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$480\,g\,CH_3OH \times \frac{1\,mol\,CH_3OH}{32\,g\,CH_3OH} \times \frac{6\,mol\,atom}{1\,mol\,CH_3OH} = \frac{480 \times 6}{32} = 90\,mol\,atom$$

توجه مول یکسان از اتم‌ها، شامل شمار اتم‌های یکسانی است؛ بنابراین برای راحتی کار، به جای شمار اتم‌ها و استفاده از عدد آووگادرو، شمار مول آن را حساب کردیم.

گام دوم: حساب می‌کنیم در چند گرم سرب مداد (یا همون کربن!)، ۹۰ مول اتم وجود دارد:

$$90\,mol\,atom\,C \times \frac{12\,g\,C}{1\,mol\,atom\,C} = 1080\,g\,C$$

تست و پاسخ ۳۴

عنصر X متعلق به دورهٔ چهارم و گروه ۸ جدول تناوبی و عنصر Y دارای ۱۷ الکترون با $l=1$ است. بین این دو عنصر در جدول تناوبی، چند عنصر وجود دارد؟

زیرلایه‌های p

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی: آرایش الکترونی عنصر دورهٔ چهارم در گروه ۸ به $3d^6 4s^2$ ختم می‌شود.

$X:[_{18}Ar]\,3d^6\,4s^2 \Rightarrow$ عدد اتمی عنصر X: $18+6+2=26$

عنصر Y دارای ۱۷ الکترون با $l=1$ (زیرلایه‌های p) است: $Y:1s^2/2s^2\underline{2p^6}/3s^2\underline{3p^6}3d^{10}/4s^2\underline{4p^5} \Rightarrow$ عدد اتمی عنصر Y $=35$

در مجموع ۱۷ الکترون با $l=1$

بین دو عنصر با عدد اتمی ۲۶ و ۳۵، ۸ عنصر با عددهای اتمی ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳ و ۳۴ وجود دارند.

نکته: تعداد عنصرها بین دو عنصر با عددهای اتمی a و b از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

تعداد عنصرها = تفاوت عدد اتمی $-1=(b-a)-1$ **مثال:** تعداد عنصرها بین $_{26}X$ و $_{35}Y$ $=(35-26)-1=9-1=8$

تست و پاسخ ۳۵

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **پرتویی با طول موج ۸۰۰nm، در گسترهٔ پرتوهای فرابنفش قرار دارد.**
- **ریزموج‌ها دارای کم‌ترین انرژی در گسترهٔ امواج الکترومغناطیسی هستند.**
- **نور مرئی رنگ شعلهٔ لیتیم نیترات در مقایسه با نور مرئی شعلهٔ فلز مس، طول موج بلندتری دارد.**
- **در محدودهٔ امواج الکترومغناطیس، پرتوهای ایکس، بین پرتوهای فرابنفش و گاما قرار دارد.**

سرخ

سبز

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی: عبارت‌های سوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: طول موج پرتوهای فرابنفش، کوتاه‌تر از گسترهٔ مرئی $(400-700\,nm)$ است؛ بنابراین پرتویی با طول موج ۸۰۰ نانومتر نمی‌تواند در گسترهٔ پرتوهای فرابنفش قرار داشته باشد.

عبارت دوم: امواج رادیویی دارای کم‌ترین انرژی در گسترهٔ امواج الکترومغناطیس هستند، نه ریزموج‌ها!

عبارت سوم: رنگ شعلهٔ فلز لیتیم و همهٔ ترکیب‌های آن، به رنگ سرخ و رنگ شعلهٔ فلز مس و ترکیب‌های گوناگون آن، به رنگ سبز است. طول موج رنگ سرخ، بلندتر از طول موج رنگ سبز می‌باشد.

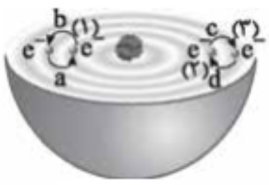
عبارت چهارم: *کاملاً درسته!*

امواج رادیویی > ریزموج‌ها > پرتوهای فروسرخ > نور مرئی > پرتوهای فرابنفش > پرتوهای ایکس > پرتوهای گاما :مقایسهٔ طول موج امواج الکترومغناطیس

تست و پاسخ ۳۶

با توجه به شکل روبه‌رو، کدام مورد نادرست است؟

$n=3 \rightarrow n=2$



۱) در اثر انتقال الکترونی a، پرتویی با طول موج ۶۵۶ nm در طیف نشری خطی این عنصر ایجاد می‌شود.

۲) انرژی الکترون در حالت (۲) بیشتر از حالت (۱) و کم‌تر از حالت (۳) است.

۳) به کمک مدل بور، نمی‌توان طیف نشری خطی عنصر نشان داده شده در شکل را توجیه کرد.

۴) بیشترین طول موج در میان امواج الکترومغناطیسی نشرشدهٔ حاصل از انتقال‌های الکترونی نشان داده شده در این اتم، مربوط به انتقال d است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی طول موج پرتوی نشرشده در انتقال الکترونی $n=3 \rightarrow n=2$ در اتم هیدروژن برابر ۶۵۶ nm است، ولی شکل داده‌شده که مربوط به اتم هیدروژن $({}_{1}H)$ نیست! (به هستهٔ اتم داده‌شده دقت کنید!)

از آن‌جا که انرژی لایه‌های الکترونی اطراف هستهٔ هر اتم، به عدد اتمی آن وابسته است، انرژی لایه‌ها و تفاوت انرژی میان آن‌ها در اتم عنصرهای گوناگون متفاوت می‌باشد؛ بنابراین طول موج (و انرژی) پرتوی نشرشده در انتقال الکترونی a با طول موج (و انرژی) پرتوی نشرشدهٔ حاصل از همین انتقال الکترونی در اتم هیدروژن، *متفاوته! و نمی‌تونه ۶۵۶ nm باشه!*

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) هر چه الکترون در لایهٔ دورتری از هسته قرار داشته باشد، انرژی آن بیشتر است.

$n=1<n=2<n=3<n=4<\cdots$:مقایسهٔ سطح انرژی الکترون در لایه‌های مختلف

۳) درسته! مدل اتمی بور، فقط می‌تواند طیف نشری خطی اتم هیدروژن را توجیه کند؛ اتم مورد نظر در سؤال هم که اتم هیدروژن نیست!

۴) هر چه از هستهٔ اتم دورتر می‌شویم، تفاوت انرژی بین دو لایهٔ متوالی کاهش می‌یابد. با توجه به شکل در اثر دو انتقال الکترونی a و d (بازگشت الکترون از لایه‌های بالاتر به لایه‌های پایین‌تر) امواج الکترومغناطیس نشر می‌شود. تفاوت انرژی لایه‌های سوم و چهارم $(d: n=4 \rightarrow n=3)$، کم‌تر از تفاوت انرژی لایه‌های دوم و سوم $(a: n=3 \rightarrow n=2)$ است. از آن‌جا که انرژی با طول موج رابطهٔ وارونه دارد، طول موج پرتوی نشرشده در انتقال d بلندتر از طول موج پرتوی نشرشده در انتقال a است.

تست و پاسخ ۳۷

دربارهٔ نخستین عنصر ساخت بشر، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- **نیم‌عمر آن از نیم‌عمر سبک‌ترین رادیوایزوتوپ هیدروژن، کم‌تر است.**
- **با پنجمین عنصر دستهٔ d جدول تناوبی، هم‌گروه و با سی‌ونهمین عنصر جدول، هم‌دوره است.**
- **شمار نوترون‌های آن بیشتر از ۱/۵ برابر شمار پروتون‌های آن است.**
- **به علت پرتوزابودن و تشابه اندازهٔ آن با یون یدید، در تصویربرداری از غدهٔ تیروئید استفاده می‌شود.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره **از اون‌جا که در یکی از سؤال‌های کنکور سراسری تجربی تیر ۱۴۰۲، از موقعیت (شمارهٔ دوره و گروه) عنصر تکنسیم در جدول تناوبی سؤال اومده، باید عدد اتمی و برای محکم‌کاری، عدد جرمی این عنصر رو حفظ باشین!**

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و دوم درست‌اند. تکنسیم $({}^{99}_{43}Tc)$، نخستین عنصر ساخت بشر است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

در کتاب درسی می‌خوانیم که نیم‌عمر (زمان ماندگاری) این عنصر ساختگی یعنی تکنسیم، کم است و نمی‌توان مقادیر زیادی از این عنصر را تهیه و برای مدت طولانی نگه‌داری کرد، ولی سبک‌ترین رادیوایزوتوپ هیدروژن، یعنی ایزوتوپ ${}^{3}_{1}H$، نیم‌عمری حدود ۱۲ سال دارد.

نکته تعیین شمارهٔ دوره و گروه عنصرها با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب

تعیین شمارهٔ دوره: برای تعیین شمارهٔ دورهٔ یک عنصر کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قبلی و بعدی آن قرار دهیم. شمارهٔ دورهٔ عنصر با شمارهٔ دورهٔ گاز نجیب بعدی یکسان است.

عدد اتمی عنصرهای این دوره	گاز نجیب دوره	شمارهٔ دوره
۱ و ۲	${}_{2}He$	۱
۳ ـ ۱۰	${}_{10}Ne$	۲
۱۱ ـ ۱۸	${}_{18}Ar$	۳
۱۹ ـ ۳۶	${}_{36}Kr$	۴
۳۷ ـ ۵۴	${}_{54}Xe$	۵
۵۵ ـ ۸۶	${}_{86}Rn$	۶
۸۷ ـ ۱۱۸	${}_{118}Og$	۷

${}^{99}_{43}Tc$

${}^{3}_{1}H$

${}_{\text{گروه ۷}}3d^5 4s^2$:آرایش الکترون‌های ظرفیت

تعیین شمارهٔ گروه، برای تعیین شمارهٔ گروه، سه حالت پیش می‌آید:

۱) اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، در این حالت شمارهٔ گروه برابر با تفاوت عدد اتمی عنصر با گاز نجیب دورهٔ قبل است (شمارهٔ گروه برابر ۱ یا ۲ می‌باشد). شمارهٔ گروه عنصر $_{19}X$ $\Rightarrow$ $19-18=1$: عدد اتمی $_{18}Ar$ ← $_{19}X$:**مثال**

۲) عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهای ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ جدول) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

۳) برای بقیهٔ عنصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از ۲ واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب **هم‌دوره‌اش** را از عدد ۱۸ کم کنیم تا شمارهٔ گروه به دست آید. شمارهٔ گروه $= 18-(54-47)=11$ $\xrightarrow{47-36=11>2}$ $_{47}A$:**مثال**

(54: گاز نجیب هم‌دوره، 47: عدد اتمی عنصر)

- عنصر تکنسیم $(_{43}Tc)$، در دورهٔ پنجم و گروه ۷ جدول قرار دارد:

عدد اتمی عنصرهای دورهٔ پنجم از ۳۷ تا ۵۴ است؛ بنابراین $_{43}Tc$ در دورهٔ پنجم قرار دارد. $\Rightarrow$ تعیین شمارهٔ دوره

$_{43}Tc \xrightarrow{43-36=7>2}$ شمارهٔ گروه $= 18-(54-43)=7$ $\Rightarrow$ تعیین شمارهٔ گروه

(54: گاز نجیب هم‌دوره، 43: عدد اتمی)

از طرفی پنجمین عنصر دستهٔ d دارای آرایش الکترونی $[_{18}Ar]3d^5 4s^2$ بوده و در گروه ۷ جدول قرار دارد و عنصرهایی با عدد اتمی ۳۷ تا ۵۴ (مانند عنصر ۳۹ام جدول)، در دورهٔ پنجم قرار دارند.

- تکنسیم از جمله اتم‌هایی است که نسبت نوترون به پروتون آن کم‌تر از ۱/۵ است، ولی پرتوزا می‌باشد:

$$_{43}^{99}Tc: \frac{N}{Z}=\frac{99-43}{43}=\frac{56}{43} \xrightarrow{43\times 1/5=64/5} \frac{56}{43}<1/5$$

- اندازهٔ یون **حاوی** تکنسیم که برای تصویربرداری غدهٔ تیروئید استفاده می‌شود با اندازهٔ یون یدید مشابه است، نه اندازهٔ خود اتم تکنسیم!

تست و پاسخ ۳۸

اگر آنیون پایدار X^{3-} دارای ۶ الکترون با $n+l=4$ و ۱۶ نوترون باشد، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

$n+l=4$ ← $\begin{cases} 4s \rightarrow n+l=4+0=4 \\ 3p \rightarrow n+l=3+1=4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ زیرلایه‌های 4s و 3p

- **شمار نوترون‌های اتم X بیشتر از شمار الکترون‌های X^{3-} است.** ← ۱۶ نوترون
- **عنصر X در دما و فشار اتاق، به شکل مولکول‌های دواتمی وجود دارد.**
- **آنیون X^{3-} در بیرونی‌ترین لایهٔ خود، دارای ۶ الکترون است.**
- **در آرایش الکترون ـ نقطه‌ای اتم X، شمار الکترون‌های جفت‌نشده (تکی) و جفت‌شده برابر است.**
- **اتم X می‌تواند با هیدروژن، ترکیب یونی با فرمول XH_2 تشکیل دهد.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

همهٔ عبارت‌های داده‌شده نادرست‌اند.

پاسخ تشریحی زیرلایه‌های 3p و 4s دارای $n+l=4$ هستند. با توجه به این‌که 3p زودتر از 4s از الکترون اشغال می‌شود، آرایش آنیون پایدار X^{3-} به زیرلایهٔ $3p^6$ ختم می‌شود؛ بنابراین آرایش اتم خنثی X به $3p^3$ ختم می‌شود:

$$X:[_{10}Ne]3s^2 3p^3 \Rightarrow Z=15 \xrightarrow{N=16} {}_{15}^{31}X$$

بررسی عبارت‌ها:

- یون X^{3-} (و اتم X) دارای ۱۶ نوترون و یون X^{3-} دارای ۱۸ الکترون است؛ یعنی شمار نوترون‌های اتم X، کم‌تر از شمار الکترون‌های یون پایدار آن (X^{3-}) است.
- عنصر X همان فسفر است. فسفر که در دما و فشار اتاق به شکل مولکول‌های دواتمی نیست!

نکته در دما و فشار اتاق، ۷ عنصر به شکل مولکول‌های دواتمی وجود دارند:

$\underbrace{H_2 / N_2 / O_2 / F_2 / Cl_2}_{\text{گاز}} / \underbrace{Br_2}_{\text{مایع}} / \underbrace{I_2}_{\text{جامد}}$

- در بیرونی‌ترین لایهٔ آنیون X^{3-} $(n=3)$، ۸ الکترون $(3s^2 3p^6)$ وجود دارد. دقت کنید که در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ آنیون X^{3-}، $(3p^6)$، ۶ الکترون وجود دارد نه در بیرونی‌ترین لایهٔ آن!

$$_{15}X:[_{10}Ne]3s^2 3p^3 \rightarrow {}_{15}X^{3-}:[_{10}Ne]\underbrace{3s^2 3p^6}_{\text{بیرونی‌ترین لایه}}$$

- اتم $_{15}X$ در گروه ۱۵ قرار دارد و آرایش الکترون ـ نقطه‌ای آن به صورت $\dot{\underset{\cdot}{\ddot{X}}}\cdot$ است. شمار الکترون‌های جفت‌نشده (۳تا) از شمار جفت‌الکترون‌ها (یکی)، بیشتر است.
- اتم X (فسفر) نافلز است و با اتم هیدروژن، ترکیب مولکولی تشکیل می‌دهد و نه یونی!

تست و پاسخ ۳۹

اگر X دهمین عنصر دستهٔ p جدول تناوبی باشد، چه تعداد از فرمول‌های شیمیایی زیر را می‌توان به ترکیبی از این عنصر نسبت داد؟

• CaX • CX_2 • Al_2X_2 • XCl_2 • Ga_2X • K_2X ← دارای ۱۰ الکترون در زیرلایه‌های p

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره دهمین عنصر دستهٔ p، یعنی عنصری که در زیرلایه‌های p اون، کلاً ۱۰ الکترون وجود داره. پس اول طبق قاعدهٔ آفبا شروع کن به پرکردن زیرلایه‌ها تا جایی که در زیرلایه‌های p در کل ۱۰ الکترون باشه، عدد اتمی عنصر و عنصر مورد نظر رو شناسایی کن. بعد با توجه به آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیتش، یون پایدار و آرایش الکترون ـ نقطه‌ایش رو رسم کن و برو سراغ این‌که ببینی در کنار اتم‌های فلزی و نافلزی داده‌شده در ترکیب‌ها، چه فرمولی رو داره.

پاسخ تشریحی دهمین عنصر دستهٔ p، یعنی عنصری که در زیرلایه‌های p آن، ۱۰ الکترون وجود دارد؛ بنابراین آرایش الکترونی عنصر X به صورت زیر است:

$X: 1s^2 2s^2 \underline{2p^6} 3s^2 \underline{3p^4}$ (X^{2-})

↘ ↙ ۱۰ الکترون در زیرلایه‌های p

X همان اتم گوگرد (S_{16}) است که در گروه ۱۶ قرار دارد، ۶ الکترون ظرفیتی دارد $(:\ddot{X}\cdot)$ و یون دو بار منفی تشکیل می‌دهد.

$Ca^{2+}X^{2-} \Rightarrow CaX$ ✓

$Al^{3+}X^{2-} \Rightarrow Al_2X_3$ ×

$Ga^{3+}X^{2-} \Rightarrow Ga_2X_3$ ×

$CX_2 \Rightarrow$ ✓ (مانند CO_2، CS_2 هم می‌تواند تشکیل شود.)

$XCl_2 \Rightarrow$ ✓ $(:\ddot{Cl}\cdot \cdot\ddot{X}\cdot \cdot\ddot{Cl}: \Rightarrow :\ddot{Cl}—\ddot{X}—\ddot{Cl}:)$

$K^+X^{2-} \Rightarrow K_2X$ ×

تست و پاسخ ۴۰

عنصر A دارای سه ایزوتوپ A^{84}، A^{86} و A^{88} است. اگر نسبت فراوانی سبک‌ترین ایزوتوپ به سنگین‌ترین ایزوتوپ برابر ۰/۵ باشد، در 10^{-5} مول از عنصر A به تقریب چند ایزوتوپ A^{86} وجود دارد و جرم یک نمونهٔ ۳۰۰ اتمی از این عنصر به تقریب برابر چند گرم است؟ (جرم اتمی میانگین برای عنصر A، برابر ۸۶/۴ amu فرض شود.)

۱) 43×10^{-16} ـ $2/4\times10^{18}$

۲) 43×10^{-21} ـ $2/4\times10^{18}$

۳) 43×10^{-21} ـ $1/6\times10^{18}$

۴) 43×10^{-16} ـ $1/6\times10^{18}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به جرم اتمی میانگین عنصر A و نسبت فراوانی ایزوتوپ سبک به سنگین، درصد فراوانی ایزوتوپ A^{86} را به دست می‌آوریم.

$$F_1 + F_2 + F_3 = 100$$

$$\frac{F_1}{F_3} = 0/5 \Rightarrow F_1 = 0/5F_3$$

$$M = M_1 + \frac{F_2}{100}(M_2 - M_1) + \frac{F_3}{100}(M_3 - M_1)$$

$$86/4 = 84 + \frac{F_2}{100}(86-84) + \frac{F_3}{100}(88-84) \Rightarrow 2/4 = \frac{2F_2}{100} + \frac{4F_3}{100} \Rightarrow 2F_2 + 4F_3 = 240 \Rightarrow F_2 + 2F_3 = 120$$

$$\begin{cases} 0/5F_3 + F_2 + F_3 = 100 \\ F_2 + 2F_3 = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/5F_3 + F_2 = 100 \\ 2F_3 + F_2 = 120 \end{cases} \Rightarrow F_3 = 40 \Rightarrow \begin{cases} F_2 = 40 \\ F_1 = 20 \end{cases}$$

گام دوم: شمار اتم‌های A^{86} را در 10^{-5} مول از عنصر A حساب می‌کنیم:

با توجه به درصد فراوانی A^{86} (۴۰٪)، می‌توان گفت که در هر ۱۰۰ مول A، ۴۰ مول از این ایزوتوپ وجود دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$10^{-5}\ \text{mol A} \times \frac{40\ \text{mol}\ ^{86}A}{100\ \text{mol A}} \times \frac{6/02\times10^{23}\ \text{اتم}}{1\ \text{mol}\ ^{86}A} \xrightarrow{6/02\simeq6} \simeq 10^{-5}\times4\times10^{-1}\times6\times10^{23} = 24\times10^{17} = 2/4\times10^{18}\ \text{اتم}$$

گام سوم: جرم نمونه ۳۰۰ اتمی از عنصر A را حساب می‌کنیم.

با توجه به جرم اتمی میانگین A (۸۶/۴ amu) و این‌که هر amu به تقریب معادل $1/66\times10^{-24}$ گرم است، خواهیم داشت:

$$300\ \text{اتم} \times \frac{86/4\ \text{amu}}{1\ \text{اتم}} \times \frac{1/66\times10^{-24}\ \text{g}}{1\ \text{amu}} \xrightarrow{86/4\simeq86\ \text{و}\ 1/66\simeq\frac{5}{3}} \simeq 3\times86\times\frac{5}{3}\times10^{-22} = 43\times10^{-21}\ \text{g}$$